Un principe local-global pour les zéro-cycles sur les surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

Appendice : niveau des corps de fonctions de surfaces fibrées en coniques, par J.-L. Colliot-Thélène et R. Sujatha.

Introduction

En 1981, Sansuc et l'auteur [CT/S81] émirent une conjecture de type local-global sur le groupe de Chow des zéro-cycles sur une surface rationnelle définie sur un corps de nombres k. Cette conjecture apparaît maintenant comme un cas très particulier d'une conjecture de type local-global pour les groupes de Chow des variétés définies sur un corps de nombres (voir le rapport [CT95] pour les zéro-cycles, et [CT97] pour les cycles de dimension quelconque), conjecture qui recouvre par ailleurs la "suite duale" de Cassels [Ca64] en théorie des courbes elliptiques.

La conjecture originale de [CT/S81] fut établie par Salberger [Sal88] pour toute surface fibrée en coniques au-dessus de la droite projective $\mathbf{P}^1_k$.

La méthode de Salberger est susceptible de variantes. Ainsi, dans [CT/SwD94], nous avons étudié les zéro-cycles sur les variétés de dimension quelconque fibrées au-dessus de la droite projective, la fibre générique étant une variété de Severi-Brauer (voir [CT/Sk/SwD97] pour des hypothèses plus générales sur la fibre générique et les fibres spéciales).

Dans le présent article, je m'intéresse au cas des surfaces fibrées en coniques sur une courbe C de genre quelconque. Reprenant en grande partie la méthode de Salberger [Sal88], mais la débarrassant d'un certain nombre d'artefacts, j'établis, pour une telle surface X/C, sous quelques hypothèses techniques supplémentaires, la validité de la conjecture locale-globale pour la partie "relative" du groupe de Chow des zéro-cycles de X, c'est-à-dire pour le noyau $CH_0(X/C)$ de l'application naturelle $CH_0(X) \to CH_0(C)$. La conjecture mentionnée ci-dessus reste ouverte pour le groupe $CH_0(X)$ lui-même.

Avant de donner les énoncés, fixons quelques notations. On désigne par k un corps parfait de caractéristique différente de 2, de clôture algébrique $\overline{k}$. On note $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Soit C une k-courbe projective, lisse et géométriquement intègre, équipée d'un k-point P_∞. Soit X une k-surface projective, lisse, géométriquement intègre, équipée d'un k-morphisme $p : X \to C$ dont toutes les fibres sont des coniques. On suppose que la fibre $X_\infty = p^{-1}(P_\infty)$ est lisse. Dans cet article, lorsque l'on parlera d'une surface fibrée en coniques, on supposera que les conditions ci-dessus sont satisfaites. On note $\{P_i\}_{i\in I}$ l'ensemble des points fermés $P \in C$ dont la fibre $p^{-1}(P)$ n'est pas lisse.

Soit $\overline{X} = X \times_k \overline{k}$. Le groupe de Néron-Severi $NS(\overline{X})$ est un module galoisien, qui est ici un $\mathcal{G}$-réseau. Soit T le k-tore de groupe des caractères $\hat{T} = NS(\overline{X})$. Soit $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles modulo l'équivalence rationnelle. Soit $CH_0(X/C)$ le noyau de la projection naturelle $CH_0(X) \to CH_0(C)$. On dispose d'une application "caractéristique" $\Phi : CH_0(X/C) \to H^1(k,T)$ (voir ([Fro95], §1: [Fro97a], §1).

Supposons que k est un corps de nombres, soit Ω l'ensemble de ses places. Pour $v \in \Omega$, soit k_v le complété de k en v. On note $X_v = X \times_k k_v$ et $C_v = C \times_k k_v$, puis $\Phi_v : CH_0(X_v/C_v) \to H^1(k_v, T)$ l'application caractéristique locale.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de l'article.

Théorème A *Soit k un corps de nombres, et X/C une surface fibrée en coniques comme ci-dessus. Soit $\alpha \in H^1(k,T)$. Si pour chaque place v de k, la restriction $\alpha_v \in H^1(k_v,T)$ est dans l'image de Φ_v, alors α est dans l'image de Φ. Plus précisément, si $\alpha_v = \Phi_v(z_v)$, alors il existe $z \in CH_0(X/C)$ tel que $\Phi(z) = \alpha$ et que pour chaque place v la restriction de z dans $CH_0(X_v/C_v)$ coïncide avec z_v.*

Rappelons ([Gros87], [Fro97a]) que le groupe $CH_0(X/C)$ est fini, et que les groupes $CH_0(X_v/C_v)$ sont finis et presque tous nuls. L'accouplement naturel entre le groupe de Chow des zéro-cycles et le groupe de Brauer et la loi de réciprocité du corps de classes donnent naissance à un complexe de groupes finis :

$$CH_0(X/C) \to \bigoplus_{v\in\Omega} CH_0(X_v/C_v) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Théorème B *Soit k un corps de nombres totalement imaginaire. Soit X/C une surface fibrée en coniques au-dessus d'une courbe C, comme ci-dessus. Alors le complexe naturel de groupes abéliens finis*

$$CH_0(X/C) \to \bigoplus_{v\in\Omega} CH_0(X_v/C_v) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

est exact.

On comparera les théorèmes A et B avec [CT/SwD94], Thm 6.2 (ii) et [CT/SwD94], Thm 6.2 (i), et avec les généralisations obtenues au paragraphe 4 de [CT/Sk/SwD97].

Dans [Sal88], un argument-clé est la décomposition canonique des polynômes en une variable utilisée au §6. Cette décomposition repose sur la division euclidienne dans l'anneau $k[t]$. Mais il s'avère extrêmement simple de lui trouver un substitut dans l'anneau $k[U]$, où U désigne le complémentaire de P_∞ dans la courbe C. Ce qui semblait être un bloquage total s'est évanoui à Bombay (Mumbai), un soir de Janvier 1996 (voir §4).

Une autre difficulté venait des lemmes de position générale pour les zéro-cycles ([Sal88], §5). Une version algébrique plus faible des lemmes de déplacement suffit (§2).

Enfin, si l'on procède bien par réduction aux zéro-cycles effectifs, on n'a pas besoin de préciser le degré (à la différence de [Sal88], Theorem (3.1)), ce qui sera sans doute bien utile pour les généralisations.

Grâce au travail d'E. Frossard ([Fro95, 97a, 97b]), il devrait être facile d'étendre les résultats principaux du présent article au groupe $CH_0(X/C)$ pour X une k-variété projective, lisse, géométriquement intègre, fibrée au-dessus d'une courbe C projective et lisse de genre quelconque, de fibre générique une variété de Severi-Brauer d'indice sans facteur carré, et possédant une fibre lisse au-dessus d'un k-point de C. Il sera sans doute un peu plus délicat d'étendre [CT/Sk/SwD97].

Remerciements Cet article a été conçu en Janvier 1996, lors d'un séjour à l'Institut Tata (Mumbai, Inde). Il a été achevé à l'Institut Isaac Newton (Cambridge, G.-B.). Je remercie ces Instituts pour leur hospitalité. Le présent article a bénéficié de discussions avec R. Sujatha, E. Frossard, V. Suresh et R. Parimala.

Plan

1. **Groupe de Chow des zéro-cycles sur les surfaces fibrées en coniques (rappels)**
2. **Lemmes de déplacement et d'effectivité de zéro-cycles**
3. **Approximations de fonctions sur un corps local**
4. **Approximations de fonctions sur un corps global**
5. **Démonstration du théorème A**
6. **Démonstration du théorème B**

Appendice: Niveau des corps de fonctions de surfaces fibrées en coniques.

§1. Groupe de Chow des zéro-cycles sur les surfaces fibrées en coniques (rappels)

Soit k, $\overline{k}$ et C comme dans l'introduction. Pour toute extension de corps L/k, on note $L(C)$ le corps des fonctions de $C \times_k L$. On note $\overline{k}(C)$ le corps des fonctions de $\overline{C} = C \times_k \overline{k}$. Soit $p : X \to C$ une surface fibrée en coniques comme dans l'introduction, et $A/k(C)$ l'algèbre de quaternions correspondant à la fibre générique de p. On note $\mathrm{Nred}(A^*) \subset k(C)^*$ le sous-groupe des normes réduites. On note U le complémentaire dans C du point P_∞. On note $k(C)^*_{dn}$ le sous-groupe de $k(C)^*$ formé des fonctions qui en tout point $P \in C$ s'écrivent comme le produit d'une unité en P par un élément de $\mathrm{Nred}(A^*)$. C'est aussi le groupe des fonctions rationnelles non nulles dont le diviseur sur C est l'image directe d'un zéro-cycle sur X (pour tout ceci, voir [Sal85], [CT/Sko93] et [Fro95]). Etant donné un ouvert non vide $W \subset C$, on utilisera la notation $k(W)^*_{dn}$ pour le sous-groupe de $k(C)^*$ formé des fonctions qui partout localement sur W s'écrivent comme une unité fois une norme réduite de A. Ce sont les fonctions f dont le diviseur $\mathrm{div}_W(f) = p_*(z)$ sur W est l'image directe $p_*(z)$ d'un zéro-cycle sur $X_W = X \times_C W$. On a le lemme (voir [CT/Sko93], §1 et Prop. 2.1) :

Lemme 1.1 *Soit W une k-courbe lisse et géométriquement intègre. Soit $p : X \to W$ une surface fibrée en coniques, et soit $A/k(W)$ l'algèbre de quaternions associée. Soit z un zéro-cycle sur X. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
a) Le zéro-cycle z est rationnellement équivalent à zéro sur X.
b) Il existe $h \in A^*$ tel que $p_*(z) = \mathrm{div}_W(\mathrm{Nred}(h))$. □

Ainsi l'application qui à une fonction $f \in k(W)^*_{dn}$ telle que $\mathrm{div}_W(f) = p_*(z)$ associe la classe de z induit un isomorphisme

$$k(W)^*_{dn}/k[W]^*\mathrm{Nred}(A^*) \simeq CH_0(X_W/W),$$

où $k[W] = H^0(W, O_W)$, et $k[W]^*$ est le groupe des fonctions inversibles sur W (cf. [CT/Sko93], op. cit.). En particulier, on a

$$k(C)^*_{dn}/k^*\mathrm{Nred}(A^*) \simeq CH_0(X/C)$$

et

$$k(U)^*_{dn}/k^*\mathrm{Nred}(A^*) \simeq CH_0(X_U/U)$$

puisque toute fonction inversible sur $U = C - P_\infty$ est constante.

On notera $\mathrm{Spec}(E)$ le sous k-schéma fermé réduit de U définissant les points P_i, $i \in I$, de mauvaise réduction pour X/C. On a $E = \prod_{i\in I} k_i$, où k_i désigne le corps résiduel en P_i. On notera $\mathrm{Spec}(F)$ le revêtement fini étale de rang constant 2 associé. A chaque point P_i est associé un corps l_i, extension quadratique de k_i, correspondant à l'extension quadratique sur laquelle sont définies les deux composantes de la fibre en P_i. On a $F = \prod_{i\in I} l_i$. On note N_i la norme de l_i à k_i, et N la norme de F à E.

On dispose d'une application dite de spécialisation

$$sp : k(U)^*_{dn} \to E^*/NF^* = \prod_{i \in I} k_i^*/N_i l_i^*.$$

Sur la composante i, cette application est ainsi définie : on représente $f \in k(U)^*_{dn}$ comme le produit d'une unité $u_i \in O^*_{U,P_i}$ dans l'anneau local en P_i par une norme réduite de A, et on regarde la classe de u_i dans k_i. On vérifie que cela ne dépend pas du choix de l'écriture. Ceci se voit simplement au niveau du complété de $k(C)$ en P_i, voir [Sal85], [CT/Sko93], [Fro95]; ou encore par le fait que l'image de $sp_i(f) \in k_i^*/N_i l_i^* \subset \mathrm{Br}(k_i)$ n'est autre que le résidu en P_i de $f \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$.

Cette application induit une application

$$\Phi_U : CH_0(X_U/U) \to E^*/k^*NF^*$$

(où k^* est envoyé dans $E^* = \prod_{i \in I} k_i^*$ par l'application diagonale).

Par ailleurs, on dispose de la suite exacte de modules galoisiens :

$$0 \to \mathrm{Pic}^o(\overline{C}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) \to 0.$$

Le module galoisien $NS(\overline{X})$ est un $\mathcal{G}$-réseau. Soit T le k-tore de groupe des caractères $\hat{T} = NS(\overline{X})$. La restriction à la fibre générique de $\overline{X}/\overline{C}$, fibre qui est isomorphe à $\mathbf{P}^1_{\overline{k}(C)}$ (théorème de Tsen), donne naissance à la suite exacte de $\mathcal{G}$-réseaux :

$$0 \to \hat{T}_0 \to \hat{T} \to \mathbf{Z} \to 0.$$

Soit $P_1 = \oplus \mathbf{Z}x$ le $\mathcal{G}$-module de permutation de base les points $x \in \overline{C}$ de mauvaise réduction pour la projection $\overline{X}/\overline{C}$, et soit $P_2 \subset \mathrm{Div}(\overline{X})$ le $\mathcal{G}$-module de permutation de base les composantes des fibres dégénérées de la fibration $\overline{X}/\overline{C}$. On a alors une suite exacte de $\mathcal{G}$-réseaux :

$$0 \to P_1 \to P_2 \oplus \mathbf{Z} \to \hat{T}_0 \to 0,$$

où la flèche $P_1 \to P_2 \oplus \mathbf{Z}$ envoie le générateur $x \in \overline{C}$ sur $p^{-1}(x) - p^{-1}(P_\infty)$.

Par l'antidualité usuelle, on obtient des suites exactes de k-tores :

$$1 \to \mathbf{G}_m \to T \to T_0 \to 0$$

et

$$1 \to T_0 \to R_{F/k}\mathbf{G}_m \times_k \mathbf{G}_m \to R_{E/k}\mathbf{G}_m \to 1.$$

Ainsi $H^1(k, T_0) = E^*/k^*NF^*$, et on a la suite exacte :

$$0 \to H^1(k, T) \to E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k),$$

où la flèche $E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k)$ est obtenue par passage au quotient à partir de l'application composée

$$E^*/NF^* = \oplus_{i \in I} k_i^*/N_i l_i^* \subset \oplus_{i \in I} \mathrm{Br}(k_i) \to \mathrm{Br}(k),$$

la dernière flèche étant la somme des applications de corestriction. (Pour une discussion de tout ceci, voir [Fro95], [Fro97a], [Fro97b].)

Lemme 1.2 *On a le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & CH_0(X/C) & \to & CH_0(X_U/U) & \to & \mathrm{Br}(k) \\ & & \downarrow \Phi & & \downarrow \xi = \Phi_U & & \downarrow = \\ 0 & \to & H^1(k,T) & \to & E^*/k^*NF^* & \to & \mathrm{Br}(k). \end{array}$$

Dans ce diagramme, la flèche $\Phi : CH_0(X/C) \to H^1(k,T)$ est l'application caractéristique (voir [Fro95] et [Fro97b). La flèche $\xi : CH_0(X_U/U) \to E^*/k^*NF^*$ est la flèche Φ_U définie ci-dessus. La flèche $CH_0(X_U/U) \to \mathrm{Br}(k)$ est définie comme suit. Soit $[X_\infty] \in \mathrm{Br}(k)$ la classe de la conique X_∞, fibre de X/C au-dessus du point P_∞. Etant donné un élément $z \in CH_0(X_U/U)$, on le représente par un zéro-cycle Z sur X_U. On associe alors à z la classe $\deg(Z)[X_\infty] \in \mathrm{Br}(k)$.

Démonstration On se reportera à [Sal88], [Fro95] et [Fro97a, Prop. 3.8]. Voici néanmoins quelques indications. Pour $f \in k(U)^*_{dn}$, l'image de $\xi(f)$ par l'application $E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k)$ coïncide avec $v_\infty(f)[X_\infty]$. Cette formule résulte du complexe de Bloch-Ogus usuel

$$H^3(k(C), \mathbf{Z}/2) \to \bigoplus_{P \in C} H^2(k(P), \mathbf{Z}/2) \to H^2(k, \mathbf{Z}/2),$$

où les flèches de gauche sont des flèches de résidu, et où celles de droite se traduisent comme les applications de corestriction ${}_2\mathrm{Br}(k(P)) \to {}_2\mathrm{Br}(k)$, et des faits suivants :

a) Pour $P \in C$ point fermé de bonne réduction pour X/C, donc pour A, et $f \in k(C)^*$, le résidu en P de $f \cup A$ est précisément $v_P(f)A(P)$, qui est nul si et seulement si f est "dn" en P. Au point P_∞, ce résidu est donc $v_\infty(f)[X_\infty]$.

b) Pour P l'un des P_i, le résidu de $f \cup A$ est précisément $sp_i(f)$.

(Ceci établit l'assertion ci-dessus selon laquelle le composé de la flèche diagonale $k^* \to \prod_i k_i^*/N_i l_i^*$ avec la somme des corestrictions est nul.) □

Rappelons le résultat suivant, cas particulier d'un résultat de Merkur'ev et Suslin ([M/S], Thm. (12.1)):

Proposition 1.3 *Soit F un corps, $\mathrm{car}(F) \neq 2$, soit A une algèbre de quaternions sur F et soit $f \in F^*$. Alors f est une norme réduite de A si et seulement si le cup-produit $f \cup A = 0 \in H^3(F, \mathbf{Z}/2)$. Dans cet énoncé, on a noté abusivement f la classe de f dans $F^*/F^{*2} = H^1(F, \mathbf{Z}/2)$ et A la classe de A dans la 2-torsion du groupe de Brauer de F, elle-même isomorphe à $H^2(F, \mathbf{Z}/2)$.*

§2. Lemmes de déplacement et d'effectivité de zéro-cycles

Lemme 2.1 *Soit k un corps infini, soient D et C des k-courbes projectives, lisses, géométriquement intègres, et $f : D \to C$ un k-morphisme fini et plat. Soit $g = g(D)$ le genre de la courbe D. Soit L un faisceau inversible sur D, de degré au moins égal à $2g+1$. Soit S un ensemble fini de points fermés de D. Il existe alors un diviseur effectif Δ sur D, qui est une section de L, a son support étranger à S, et tel que le zéro-cycle $f_*(\Delta)$ sur C aient toutes ses multiplicités égales à 1.*

Démonstration La condition que le degré d de L soit au moins égal à $2g+1$ assure que le faisceau L est très ample. Soit $H = \mathbf{P}(\widehat{H^0(D, L)})$. C'est un espace projectif de dimension $d - g$. D'après le théorème de Bertini, on peut trouver un ouvert de Zariski de H tel que pour tout point de cet ouvert, le diviseur correspondant de D soit sans facteur multiple.

Soit P un point fermé de D. L'espace projectif des sections de $L \otimes O_D(-P)$ est de dimension strictement plus petite que $H = \mathbf{P}(\widehat{H^0(D,L)})$ (appliquer Riemann-Roch sur la clôture algébrique de k, on est alors réduit au cas d'un point de degré un).

Soit $U \subset D \times_C D$ l'ouvert complémentaire de la diagonale. C'est une variété de dimension un. Soit $Z \subset U \times_k H$ le fermé formé des triples $\{P_1, P_2, h\}$, avec $P_1 \in h$ et $P_2 \in h$. Les fibres de la projection $Z \to U$ au-dessus d'un point géométrique $(P_1, P_2) \in U(\overline{k})$ sont des espaces projectifs de dimension $d - g - 2$, comme on voit en appliquant le théorème de Riemann-Roch. Ainsi la dimension de Z est $d - g - 1$, et son image par la projection $U \times_k H \to H$ est un ensemble constructible dont l'adhérence a dimension au plus $d - g - 1$.

L'énoncé résulte de la combinaison de ces trois remarques. □

Lemme 2.2 *Soit k un corps parfait infini, C/k une k-courbe projective, lisse et géométriquement intègre, X une k-variété projective, lisse et géométriquement intègre, et $p : X \to C$ un k-morphisme propre et plat. Soit A un point fermé de X, et soient $P_i, i = 1, \cdots, n$, des points fermés de C. Soit z un zéro-cycle sur X. Il existe alors un entier $r_0 > 0$ (dépendant de z) tel que pour tout entier $r \geq r_0$, il existe un zéro-cycle effectif z_r rationnellement équivalent à $z + rA$ sur X, et tel que de plus le zéro-cycle $p_*(z_r)$ sur C ait son support en dehors des points P_i et de $p(A)$, et ait toutes ses multiplicités égales à un.*

Démonstration Fixons un point fermé $R \in X$ tel que $p(R) \neq p(A)$. Par une variante connue des théorèmes de Bertini (voir [A-K] et [Coray]), on peut trouver une courbe $D \subset X$ projective, lisse et géométriquement intègre qui contienne chaque point du support de z ainsi que les points A et R. L'application $p_D : D \to C$ induite par p est alors finie et plate. Soit S l'ensemble fini des points fermés de D dont l'image par p_D est soit $p(A)$ soit l'un des points P_i. Soit $g = g(D)$ le genre de D. En prenant pour r_0 le plus petit entier supérieur ou égal à $(2g + 1 - \deg(z))/\deg(A))$, l'énoncé résulte immédatement du lemme précédent. □

Remarque Dans le cas particulier qui va nous intéresser ici, celui où X est une surface fibrée en coniques relativement minimale au-dessus d'une courbe C de genre g, Salberger [Sal85] montre que tout zéro-cycle de degré au moins égal à $N = 2g + [(r-3)/2]$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. Le cas $C = \mathbf{P}^1_k$ de ce théorème, dû à Coray et l'auteur, est utilisé par Salberger dans [Sal88]. Mais cette démonstration ne permet pas a priori de trouver z tel que $p_*(z)$ ait toutes ses multiplicités égales à un et soit étranger à des points fermés P_i donnés à l'avance. Dans [Sal88], §5, Salberger résoud ce problème par un argument spécifique aux corps locaux. Il est fait de même dans [CT/SwD94], Lemma 6.2.1. La présente démonstration évite ce problème. Une autre façon de s'en débarrasser, pour $C = \mathbf{P}^1_k$, a été utilisée dans [CT/SwD94] (Remark 5.1.1; voir aussi [CT/Sk/SwD97], Remark 4.2 (b)), mais elle ne semble pas s'adapter au cas d'une courbe de base C de genre $g > 0$.

Depuis la rédaction du présent article, Frossard et Suresh ont montré (non publié) que, pour X/C une surface fibrée en coniques comme ci-dessus, il existe un entier N_1 tel que tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à N_1 soit rationnellement équivalent, sur X, à un zéro-cycle effectif z du type cherché, i.e. tel que $p_*(z)$ ait son support étranger à certains points fermés de C, et ait toutes ses multiplicités égales à un. Cela permettrait une rédaction légèrement différente de la Proposition 5.1 ci-dessous.

§3. Approximation de fonctions sur un corps local

On conserve les notations du paragraphe 1. En particulier, on note $U = C - P_\infty$. On appelle *degré* d'une fonction $f \in k[U]$ l'opposé de la valuation $v_{P_\infty}(f)$. On dit que $f \in k[U]$ est *séparable* si le diviseur de f sur U a toutes ses multiplicités égales à un. Pour $f \in k[U]$ non nul, f appartient à $k(U)^*_{dn}$ et est séparable si et seulement si

$$\mathrm{div}_U(f) = \sum_i R_i$$

avec $R_i \neq R_j$ pour $i \neq j$ et avec $X_{R_i}(k(R_i)) \neq \emptyset$ pour tout i (on note $k(R)$ le corps résiduel d'un point fermé R).

Lemme 3.1 *Soit k un corps local de caractéristique nulle. Soit $f \in k[U] \cap k(U)^*_{dn}$. Supposons que f est séparable sur U et inversible en les points P_i, $i \in I$. Soit z un zéro-cycle effectif sur X_U tel que $\mathrm{div}_U(f) = p_*(z)$.*

Pour tout $g \in k[U]$ de même degré que f et suffisamment proche de f dans le k-vectoriel W de dimension finie formé des $g \in k[U]$ tels que $v_\infty(g) \geq v_\infty(f)$, on a :

(i) $g \in k(U)^*_{dn}$; plus précisément, il existe un zéro-cycle z_1 effectif sur X_U de même degré que z, tel que $\mathrm{div}_U(g) = p_*(z_1)$.

(ii) $sp(f) = sp(g) \in E^*/NF^*$.

(iii) f/g est une norme réduite de A, et z est rationnellement équivalent à z_1 sur X.

Démonstration Soit $\mathrm{div}_U(f) = \sum_j R_j = p_*(z)$ avec z zéro-cycle effectif sur X_U. Pour tout point R_j, il existe un point fermé Q_j sur X avec $p(Q_j) = R_j$ et $k(R_j) \simeq k(Q_j)$. On peut supposer $z = \sum_j Q_j$. On choisit pour chaque paire Q_j, R_j une courbe intègre $C_j \subset X$ étale au-dessus de C en Q_j. En utilisant une version convenable du théorème de Krasner et le théorème des fonctions implicites, on voit que si g est "très proche" de f, alors $\mathrm{div}_U(g) = \sum_j T_j$ avec $T_j = p_*(S_j)$ et S_j point fermé de C_j très proche de Q_j (tous les points d'indice j ayant même corps résiduel). Ceci établit le point (i), et le point (ii) est clair, puisque sp_i envoie f sur la classe dans $k_i^*/N_i l_i^*$ de l'évaluation de f en P_i.

Supposons k p-adique. Soit O l'anneau des entiers de k, et soit $\mathcal{C}/O$ un modèle intègre, régulier, propre de la courbe C/k au-dessus de O. Le point rationnel P_∞ définit une section de $\mathcal{C}/O$; soit $\mathcal{U}$ le complémentaire de cette section (ceci n'est en général pas un schéma affine). Soit B_y l'anneau local de $\mathcal{X}$ au point générique y d'une composante de la fibre spéciale Y de $\mathcal{X}/O$. Soit $\hat{B}_y$ le complété de B_y, et soit $\hat{K}_y$ le corps des fractions de $\hat{B}_y$. Par le lemme de Hensel, il existe un entier n tel que tout élément de $1 + p^n B_y$ est un carré dans $\hat{B}_y$ (la valuation de p dans B_y est strictement positive). Il existe donc un entier m tel que tout élément de la forme $f + p^m h$ avec h entier en chaque point générique y de la fibre spéciale diffère de f, dans chaque $\hat{K}_y$, par un carré.

D'après les parties (i) et (ii), on sait déjà que pour $g \in W$ dans un voisinage ouvert W_1 de f, la classe de $f/g \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ a ses résidus triviaux en chaque point fermé de C. L'anneau $O[\mathcal{U}] = H^0(\mathcal{U}, O_\mathcal{U})$ est contenu dans chaque anneau local B_y. Pour tout $h \in O[\mathcal{U}]$, on voit donc que $(f + p^m h)/f$ est un carré dans chaque $\hat{K}_y$, et donc $((f + p^m h)/f) \cup A = 0 \in H^3(\hat{K}_y, \mathbf{Z}/2)$. La trace de $f + p^m O[\mathcal{U}]$ sur le k-vectoriel W de l'énoncé est clairement un ouvert W_2. Pour $g \in W_1 \cap W_2$, on voit donc que la classe $g/f \cup A$, sur $\mathcal{C}$, a tous ses "résidus" triviaux : ici les "résidus" sont pris au sens du complexe de Bloch-Ogus défini par Kato [Kato86]. Il en résulte ([Kato86], Proposition 5.2) que la classe $g/f \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ est nulle (ceci vaut même si k est dyadique), et donc, par la Proposition 1.3, que g/f est une norme réduite de A. Soit $\mathrm{div}_U(g) = p_*(z_1)$ comme dans (i). Des rappels suivant le lemme 1.1 il résulte alors que le zéro-cycle $z - z_1$ est rationnellement équivalent à zéro sur X_U, donc aussi sur X puisqu'il est de degré zéro et que la fibre X_∞ est une conique lisse.

Supposons k archimédien. Si k est le corps $\mathbf{C}$ des complexes, l'algèbre A est déployée sur $\mathbf{C}(C)$ (théorème de Tsen), et tout élément de $\mathbf{C}(C)$ est une norme réduite. Supposons que k est le corps $\mathbf{R}$ des réels. Soit $T \subset C(\mathbf{R})$ le complémentaire de $p(X(\mathbf{R}))$. C'est une union $T = \bigcup_{s \in S} T_s$ d'intervalles et de cercles. Les points P_i qui sont réels n'appartiennent pas à T.

L'hypothèse $f \in \mathbf{R}(U)^*_{dn}$ implique que pour tout point P de T, la valuation $v_P(f)$ est paire. Ainsi, sur toute composante connexe T_s de T, la fonction f a un signe constant $\epsilon_s = \pm 1$ là où elle est inversible. Sur chaque composante T_s, choisissons un point P_s où f est inversible. Pour g comme dans l'énoncé et suffisamment proche de f, on a déjà vu que g appartient à $\mathbf{R}(U)^*_{dn}$. Le raisonnement ci-dessus s'applique donc à g : tout tel g a un signe constant sur chaque T_s. Dans un voisinage convenable de f, tout tel g est inversible en chaque P_s et prend en P_s le même signe que f. Pour tout tel g, la fonction g/f prend donc des valeurs positives sur T là où elle est définie. D'après le théorème de Tsen, l'algèbre de quaternions $A/\mathbf{R}(C)$ peut s'écrire $A = (-1, h)_{\mathbf{R}(C)}$, pour $h \in \mathbf{R}(C)^*$ convenable. En dehors d'un nombre fini de points d'indétermination, un point $M \in C(\mathbf{R})$ appartient à T si et seulement si $h(M) < 0$. Ainsi $h(M) < 0$ implique $(g/f)(M) > 0$. L'algèbre de quaternions $(h, g/f)_{\mathbf{R}(C)}$ s'annule donc en presque tout point de $C(\mathbf{R})$. Par un théorème de Witt [Witt37], elle est nulle, donc g/f s'écrit $a^2 - hb^2$, avec $a, b \in \mathbf{R}(C)$ et g/f est une norme réduite de l'algèbre $A = (-1, h)_{\mathbf{R}(C)}$. Le résultat sur z et z_1 résulte alors comme ci-dessus des rappels suivant le lemme 1.1. □

Lemme 3.2 *Soit O l'anneau des entiers d'un corps p-adique k de caractéristique résiduelle différente de 2. Soit $\mathcal{C}/O$ une courbe projective et lisse, C/k la fibre générique. Soit $P_\infty \in C(k)$, et $\tilde{P}_\infty \subset \mathcal{C}$ son adhérence. Soit $\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$ le complémentaire de $\tilde{P}_\infty$ et $U \subset C$ le complémentaire de P_∞. Soit A une algèbre de quaternions sur $k(C)$. Supposons que le lieu de ramification de A sur $\mathcal{C}$ consiste en des $\tilde{P}_i = \mathrm{Spec}(O_i) \subset \mathcal{U}$ finis étales sur O, d'intersection vide deux à deux, et supposons que pour chaque i le résidu au point générique P_i de $\tilde{P}_i$ définisse une extension quadratique non ramifiée de k_i. Soit $f \in O[\mathcal{U}]$. Supposons que pour chaque i, on ait $f(P_i) \in O_i^*$. Alors f est une norme réduite de A.*

Démonstration Comme C/k a bonne réduction, et la caractéristique résiduelle est différente de 2, on a $H^3_{nr}(k(C), \mathbf{Z}/2) = 0$ ([Kato86], Cor. 2.9). Il suffit donc de montrer que $f \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ est partout non ramifié. Par la loi de réciprocité, il suffit de le montrer aux points de U. En un point fermé non zéro de f et distinct des P_i, c'est évident. En un point P_i, le résidu de $f \cup A$ est la classe de $f(P_i)$ dans $k_i^*/N_i l_i^* \subset {}_2\mathrm{Br}(k_i)$. Comme l_i/k_i est non ramifiée, $f(P_i) \in O_i^*$ a une classe triviale dans $k_i^*/N_i l_i^*$. L'hypothèse $f(P_i) \in O_i^*$ assure par ailleurs que le lieu des zéros de f sur $\mathcal{U}$ ne rencontre pas $\tilde{P}_i$. Soit alors $P \in U$ un point fermé appartenant à $f = 0$, et soit $\tilde{P}$ son adhérence dans $\mathcal{C}$. Alors $\tilde{P}$ ne rencontre aucun des $\tilde{P}_i$. Ainsi l'algèbre A est d'Azumaya dans un voisinage de $\tilde{P}$. Du coup $A(P) = 0$ car c'est la restriction dans $\mathrm{Br}(k(P))$ d'un élément du groupe de Brauer de l'anneau des entiers de $k(P)$. Le résidu en P de $f \cup A$ est donc nul (il est égal à $A(P)$ multiplié par la valuation de f en P.) □

Remarques (i) Salberger [Sal88], dans son lemme 5.5 (où $U = \mathbf{A}^1_k$), suppose que le polynôme $f(t) \in O[t]$ est unitaire. Ici, cela correspondrait à choisir $f \in O[\mathcal{U}]$ tel que $O[\mathcal{U}]/f$ soit fini sur O. Je ne vois nulle part dans la démonstration un point où ceci est nécessaire.

(ii) Salberger suppose que l'algèbre A s'annule en P_∞. Cette condition est impliquée par nos hypothèses : la section à l'infini est dans l'ouvert de $\mathcal{C}$ où A est Azumaya.

(iii) Notre hypothèse implique que sur $\mathcal{C}$, l'algèbre A n'est pas ramifiée au point générique de la fibre spéciale.

§4. Approximation de fonctions sur un corps global

On considère un modèle projectif et lisse $\mathcal{C}/O$ de C sur un ouvert $\mathrm{Spec}(O)$ de l'anneau des entiers d'un corps de nombres k, et le modèle $\mathcal{U}$ de U associé, c'est-à-dire le complémentaire de la section à l'infini de $\mathcal{C}$ définie par l'adhérence du point P_∞ dans $\mathcal{C}$. Pour $i \in I$, soit O_i l'anneau des O-entiers de k_i. Soit A l'algèbre de quaternions $A \in \mathrm{Br}(k(C))$ associée à la fibration en coniques $X \to C$, et soient P_i les points fermés de U où elle est ramifiée. Soient $\tilde{P}_i \subset \mathcal{C}$

l'adhérence de P_i. Quitte à restreindre O, on peut supposer que la réunion des $\tilde{P}_i = \mathrm{Spec}(O_i)$ est dans $\mathcal{U}$, qu'elle est finie et étale sur O, et que pour chaque i le résidu au point générique P_i de $\tilde{P}_i$ définit une extension quadratique non ramifiée de k_i.

On utilise la notion de degré sur $k[U]$ définie plus haut, à savoir l'opposé de la valuation en P_∞. Soient P_i, $i \in I$ des points fermés de U, soit $k_i = k(P_i)$ le corps résiduel en P_i. Soit r la somme des degrés (sur k) des P_i. Soit g le genre de C.

Lemme 4.1 *Pour tout entier $n > 2g-2+r$, le sous-espace V_n de $k[U]$ formé des fonctions de degré au plus n s'envoie surjectivement sur $\oplus_i k_i$.*

Démonstration Pour tout entier $n > 0$, on a la suite exacte de $\mathcal{O}_C$–modules cohérents:

$$0 \to \mathcal{O}_C(nP_\infty - \sum_{i \in I} P_i) \to \mathcal{O}_C(nP_\infty) \to \bigoplus_{i \in I} k_i \to 0.$$

Pour $n > 2g-2+r$, on a $H^1(C, \mathcal{O}_C(nP_\infty - \sum_i P_i)) = 0$ par dualité de Serre. L'application $H^0(C, \mathcal{O}_C(nP_\infty)) \to \oplus_{i \in I} k_i$ est donc surjective pour tout tel n. $\square$

Dans la suite, on fixe un entier n tel que $n > 2g-2+r$. Soit $W_n \subset V_n$ le noyau de la projection $V_n \to \oplus_i k_i$, et soit $\sigma = \oplus_i \sigma_i$ une section k-linéaire de cette projection. On a donc la décomposition

$$V_n = W_n \bigoplus (\oplus_{i \in I} \sigma_i(k_i)).$$

Cette décomposition est invariante par changement de corps de base. Pour chacun des k-vectoriels W_n et k_i, choisissons une base. Quitte à restreindre l'ouvert $\mathrm{Spec}(O)$, on peut :
(i) trouver une base de W_n formée d'éléments de $O[\mathcal{U}]$;
(ii) supposer que chaque O_i est libre sur O, et l'on fixe alors une O-base de O_i.
(iii) supposer que les images par σ_i de cette base appartiennent à $O[\mathcal{U}]$.

Lemme principal 4.2 *Soit k un corps de nombres, et X, C, U comme ci-dessus. Soit $\eta \in E^*/N_{E/F}F^*$. Soit n comme ci-dessus. Supposons que pour toute place v il existe un élément f_v de $V_n \otimes_k k_v \subset k_v[U]$ de degré exactement n, qui soit dans $k_v(U)^*_{dn}$, soit $\mathrm{div}_U(f_v) = p_*(z_v)$, et que le diviseur $\mathrm{div}_U(f_v)$ ait toutes ses multiplicités égales à 1 et soit étranger aux points de mauvaise réduction de X/C, et qu'enfin $sp_v(f_v) \in E_v^*/NF_v^*$ soit l'image de η.*

Alors il existe un élément $f \in V_n$, de degré n, appartenant à $k(U)^*_{dn}$, soit $\mathrm{div}_U(f) = p_*(z)$, tel que $sp(f) = \eta$. De plus si S_0 est un ensemble fini de places de k, on peut choisir $f \in V_n \subset k[U]$ et z tels que f soit arbitrairement proche de chaque $f_v \in V_n \otimes_k k_v$ pour $v \in S_0$, et que pour toute place v, les cycles z et z_v soient rationnellement équivalents sur $X \times_k k_v$.

Démonstration On note S un ensemble fini de places contenant :
(a) les places archimédiennes;
(b) les places dyadiques;
(c) les places finies v telles que l'image de η dans E_v^*/NF_v^* soit non triviale;
(d) les places finies v pour lesquelles $CH_0(X_v/C_v) \neq 0$;
(d) les places finies non dans $\mathrm{Spec}(O)$ (avec O comme ci-dessus);
(f) les places de S_0.

Soit S_1 l'ensemble des places telles que $A_v = A \otimes_{k(C)} k_v(C)$ soit triviale dans $\mathrm{Br}(k_v(C))$. Cet ensemble est infini. En effet, par le théorème de Tsen, il existe une extension finie K/k telle que A s'annule dans $\mathrm{Br}(K(C))$, et on conclut par le théorème de Tchebotarev. Observons que pour toute place $v \in S_1$, et tout i, l'extension quadratique $l_{i,v}/k_{i,v}$ est triviale.

Chaque $f_v \in V_{n,v} = V_n \otimes_k k_v$ s'écrit de façon unique :

$$f_v = g_v + \sum_i \sigma_i(\rho_{i,v}),$$

avec $g_v \in W_{n,v}$ et $\rho_{i,v} \in k_{i,v}^* = (k_i \otimes_k k_v)^*$.

On utilise alors l'approximation forte (on utilise ici le fait que $S_1 \setminus S$ est non vide) pour fabriquer un $g \in W_n$, de coefficients (par rapport à la base fixée) appartenant à $O_{S \cup S_1}$ (l'anneau des entiers en-dehors de $S \cup S_1$), et très proche des coefficients de f_v pour $v \in S$.

Comme $S_1 \setminus S$ est infini, le théorème de Dirichlet généralisé (variante due à Sansuc et l'auteur [San82], conséquence facile d'un théorème de Waldschmidt) permet de trouver, pour chaque i, un élément $\rho_i \in k_i^*$ qui soit très proche de $\rho_{i,v}$ pour $v \in S$ et qui soit une unité de k_i en dehors de $S \cup S_1 \cup w_i$, où w_i est une place (finie) de k_i étrangère à $S \cup S_1$ et telle que de plus $w_i(\rho_i) = 1$.

On trouve ainsi un $f \in V_n$, appartenant à $O[\mathcal{U}]$, très proche de f_v aux places de S, et satisfaisant $f(P_i) = \rho_i$.

Montrons que pour toute place $w \neq w_i$ de k_i, $\eta_i \in k_i^*/N_i l_i^*$ et $f(P_i) = \rho_i \in k_i^*$ ont même image dans $k_{i,w}^*/N_i l_{i,w}^*$.

Pour w au-dessus d'une place v de S_1, c'est clair, car $k_{i,v}^*/N_i l_{i,v}^* = 1$.

Pour w au-dessus d'une place de S, cela résulte du fait que f est très proche de f_v, donc $f(P_i)$ et $f_v(P_i)$ ont même image dans $k_{i,v}^*/N_i l_{i,v}^*$, et par hypothèse l'image de $f_v(P_i)$ dans $k_{i,v}^*/N_i l_{i,v}^*$ est égale à celle de η_i.

Soit w une place de k_i au-dessus d'une place non dans S. L'extension $l_{i,w}/k_{i,w}$ est non ramifiée. Pour une telle $w \neq w_i$, la classe de $\rho_i \in k_i^*$ est une w-unité, donc ρ_i a une image triviale dans $k_{i,w}^*/N_i l_{i,w}^*$. Par définition de S, η_i a une image triviale dans $k_{i,w}^*/N_i l_{i,w}^*$.

Ainsi les classes de $f(P_i)$ et η_i dans $k_i^*/N_i l_i^*$ coïncident dans $k_{i,w}^*/N_i l_{i,w}^*$ pour toute place w de k_i, sauf peut-être la place w_i. Par la loi de réciprocité de la théorie du corps de classes global, elles coïncident aussi en cette place, et elles coïncident dans $k_i^*/N_i l_i^*$.

Nous avons donc établi l'assertion $sp(f) = \eta$.

La démonstration ci-dessus montre qu'en la place w_i, l'extension l_i/k_i est décomposée: en effet d'une part $w_i(\rho_i) = 1$, d'autre part ρ_i est une norme locale en w_i, puisque sa classe dans $k_{i,w_i}^*/N_i l_{i,w_i}^*$ coïncide avec celle de $f(P_i)$, qui est triviale.

Par construction, f est très proche de f_v pour toute place $v \in S$. Il reste à montrer que f appartient à $k(U)_{dn}^*$.

Pour $v \in S$, d'après le lemme 3.1, on a $f \in k_v(U)_{dn}^*$, plus précisément $f/f_v \in \mathrm{Nred}(A_v)$, et $\mathrm{div}_U(f) = p_*(z_v)$ avec z_v rationnellement équivalent à z sur X_v.

Pour $v \in S_1$, comme A est déployée sur $k_v(C)$, on a certainement $f \in \mathrm{Nred}(A_v)$, donc a fortiori $f \in k_v(U)_{dn}^*$.

Pour $v \notin S \cup S_1$ et v non au-dessous d'une place w_i, le lemme 3.2 assure $f \in \mathrm{Nred}(A_v)$.

Ceci vaut encore pour les places v au-dessous d'une place w_i. On a vu en effet que w_i est décomposée dans l_i/k_i. Plaçons-nous sur k_v. Le lieu de ramification Δ de A_v sur $\mathcal{C} \times_O O_v$ est situé dans la réunion des $\tilde{P}_i \times_O O_v = \mathrm{Spec}(O_i \otimes_O O_v) = \cup_{w|v}\mathrm{Spec}(O_{i,w})$. Comme w_i est décomposée dans l'extension l_i/k_i, Δ est en fait inclus dans la réunion pour tout i des $\cup_{w|v, w \neq w_i}\mathrm{Spec}(O_{i,w})$. Mais alors on est dans les conditions d'application du lemme 3.2, car pour $w|v$ et $w \neq w_i$, on a $f(P_i) = \rho_i \in O_{i,w}^*$.

La condition $f \in k(U)_{dn}^*$ se traduit ainsi : pour tout point $P \in U$ différent de l'un des P_i, le résidu $\delta_P(f \cup A) \in H^2(k(P), \mathbf{Z}/2)$ est nul (cette condition est automatiquement vérifiée si $A(P) = 0$). Comme on a montré $f \in k_v(U)_{dn}^*$ pour toute place v de k, on conclut que pour tout point fermé P comme ci-dessus, le résidu $\delta_P(f \cup A) \in H^2(k(P), \mathbf{Z}/2)$ a une image nulle dans

$H^2(k(P)_w, \mathbf{Z}/2)$ pour toute place w de $k(P)$. Il est donc nul d'après le principe de Hasse pour le groupe de Brauer, et on a bien $f \in k(U)^*_{dn}$.□

Remarques

1) Chez Salberger, il y a une utilisation du théorème de Dirichlet généralisé pour le coefficient "de plus haut degré" en t. Ceci ne semble pas requis.

2) Dans la démonstration ci-dessus, on n'a utilisé l'existence de fonctions f_v que pour v parcourant l'ensemble fini de places décrit au début de la démonstration.

§5. Démonstration du théorème A

Dans tout ce paragraphe, on désigne par X/C une fibration en coniques. On utilise les hypothèses et notations du paragraphe 1.

On comparera l'énoncé suivant avec [Sal88], Cor. 3.3.

Proposition 5.1 *Soit X/C une fibration en coniques. Soit $\varepsilon \in E^*/k^*NF^*$ dans le noyau de l'application composée*

$$E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(X_\infty)).$$

Supposons que ε_v appartient à l'image de Φ_{U_v} pour chaque $v \in \Omega$, soit $\varepsilon_v = \Phi_{U_v}(Z_v)$.

Alors pour tout ensemble fini de places $T \subset \Omega$ et tout entier $n > 0$, il existe pour $v \in T$ des zéro-cycles effectifs z_v sur X_{U_v}, tous de même degré supérieur ou égal à n, tels que :

a) z_v est rationnellement équivalent à Z_v sur X_{U_v};

b) chaque $p_*(z_v)$ a ses multiplicités égales à 1 et est étranger aux points P_i de mauvaise réduction pour X/C.

Lorsque $\varepsilon \in E^*/k^*NF^*$ est dans le noyau de l'application $E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k)$, le même énoncé vaut en remplaçant T par l'ensemble Ω de toutes les places de k.

Démonstration Par hypothèse, on a $\varepsilon_v = \Phi_{U_v}(Z_v)$ pour Z_v un zéro-cycle de X_{U_v} dont la classe appartient à $CH_0(X_{U_v}/U_v)$.

Soit Σ l'ensemble fini ou vide des places de k telles que $X_\infty(k_v) = \emptyset$. Montrons que les degrés des Z_v pour $v \in \Sigma$ ont tous la même parité. Détaillons ce point, qui n'est pas entièrement explicité dans [Sal88]. Par hypothèse, l'image de ε par l'application $E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k)$ s'annule dans $\mathrm{Br}(k(X_\infty))$, cette image vaut donc soit 0 (premier cas) soit $[X_\infty]$ (second cas). Ces deux cas sont confondus lorsque $[X_\infty] = 0$, i.e. lorsque $X_\infty(k) \neq \emptyset$, i.e. lorsque $\Sigma = \emptyset$.

Dans le premier cas, l'image de ε_v dans $\mathrm{Br}(k_v)$ est nulle pour tout $v \in \Sigma$ et par le lemme 1.2, le degré de Z_v est pair (puisque $[X_\infty]_v \neq 0$ pour $v \in \Sigma$.)

Dans le second cas, l'image de ε_v dans $\mathrm{Br}(k_v)$ vaut $[X_\infty]_v \neq 0$ pour tout $v \in \Sigma$, et par le même lemme 1.2, le degré de Z_v est impair pour tout $v \in \Sigma$.

Soit P_v un point fermé de degré minimum sur $X_{\infty,v}$.

Pour toute place $v \in \Omega$, par application du lemme 2.2 sur le corps de base k_v, on voit que pour $r_v \in \mathbf{N}$ entier suffisamment grand, le zéro-cycle $Z_v + r_vP_v$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle z_v du type voulu. Pour $v \in \Sigma$, le degré de z_v est pair dans le premier cas, impair dans le second cas. Pour $v \notin \Sigma$, on peut donner à z_v une parité quelconque.

Pour tout ensemble *fini* T de places de k, la première partie de la proposition est établie.

Supposons qu'on soit dans le premier cas, i.e. ε est dans le noyau de $E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k)$. Pour tout ensemble fini T de places, on sait qu'on peut trouver des z_v du type voulu, pourvu que leur degré soit pair et suffisamment grand. Soit P un point fermé de X_∞ de degré pair. Soit $D \subset X$ une courbe projective, lisse, géométriquement intègre, finie sur C, contenant le point P. D'après le lemme 2.1, pour tout entier n suffisamment grand, le zéro-cycle nP est, sur D rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif w_n tel que $p_*(w_n)$ ait toutes ses multiplicités égales à 1 et que son support soit étranger aux P_i et à ∞. Pour presque toute place v, on a $CH_0(X_{U_v}/U_v) = 0$. On peut donc pour un tel v supposer $Z_v = 0$, et prendre $z_v = w_{n,v}$. La seconde partie de l'énoncé est alors claire. □

Remarque Le premier cas, i.e. le cas où $\varepsilon \in E^*/k^*NF^*$ est dans le noyau de l'application $E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k)$ (il en est ainsi trivialement lorsque $X_\infty(k) \neq \emptyset$), servira seul dans la suite. Mais l'énoncé plus général ci-dessus (où l'on peut sans doute remplacer T par Ω au prix d'un effort supplémentaire) pourrait se révéler utile dans l'étude de l'existence d'un zéro-cycle de degré un sur X, comme c'était le cas dans [Sal88].

Nous pouvons maintenant établir le théorème A.

Rappelons que les groupes $CH_0(X/C)$ et $CH_0(X_v/C_v)$ sont finis, et ces derniers sont nuls pour presque toute place v (Gros, [Gros87]; voir [Fro95] pour une démonstration via les groupes $k(C)^*_{dn}$). Il en est donc de même des $CH_0(X_{U_v}/U_v)$ (utiliser le lemme 1.2).

Supposons donné pour chaque place $v \in \Omega$ un zéro-cycle z_v de degré zéro sur X_v, dont la classe appartient à $CH_0(X_v/C_v)$. On a l'application naturelle $\Phi_v : CH_0(X_v/C_v) \to H^1(k_v, T)$. Par hypothèse, la famille des $\Phi_v(z_v)$ provient d'une classe $\varepsilon \in H^1(k,T) \subset E^*/k^*NF^*$. Compte tenu des rappels faits au paragraphe 1, cette classe est dans le noyau de la flèche $E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k)$, et l'on voit que la famille des restrictions $z_{v,U}$ des z_v aux X_{U_v} satisfait l'hypothèse de la Proposition 5.1.

D'après cette proposition, on peut trouver des zéro-cycles effectifs ζ_v sur X_{U_v}, dont la classe coïncide avec celle de $z_{v,U} \in CH_0(X_{U_v}/U_v)$, tous de même degré n, qu'on peut prendre supérieur ou égal à $2g - 2 + r$ (notations comme au lemme 4.1).

De plus les $p_*(\zeta_v)$ sont représentés par des $g_v \in k_v[U]$, tous de degré n, appartenant à $k_v[U] \cap k_v(U)_{dn}$, d'image ε_v par l'application Φ_{U_v}, et tels que $\mathrm{div}_U(g_v)$ soit étranger aux P_i et ait toutes ses multiplicités égales à 1.

On relève alors ε en $\eta \in E^*/NF^*$. Quitte à multiplier chaque g_v par un scalaire dans k_v^*, on peut supposer que l'image de g_v dans E_v^*/NF_v^* coïncide avec celle de ε par l'application évidente $E^*/NF^* \to E_v^*/NF_v^*$.

En utilisant le lemme principal 4.2, on trouve un élément $g \in k[U]$ appartenant à $k(U)^*_{dn}$, de degré n, tel que $\mathrm{div}_U(g) = p_*(\zeta)$ avec ζ zéro-cycle sur X_U, rationnellement équivalent à ζ_v dans $CH_0(X_v)$ pour toute place v et tel que de plus $sp(g) = \eta$.

Observons que $\Phi(g) = \varepsilon \in E^*/k^*NF^*$ appartient au noyau de l'application

$$E^*/k^*NF^* \to \mathrm{Br}(k).$$

D'après le lemme 1.2, ceci implique que ζ provient d'une classe z dans $CH_0(X/C)$. On voit alors que pour toute place v, on a $z - z_v = 0 \in CH_0(X_v/C_v) \subset CH_0(X_v)$. De plus $\Phi(z) = \varepsilon \in H^1(k,T)$.

Ceci établit le théorème A.

§6. Démonstration du théorème B

Soit k un corps de caractéristique zéro et X/C une surface fibrée en coniques comme au §1, dont nous conservons les notations. Comme indiqué au §1, on a la suite exacte de modules galoisiens

$$0 \to \mathrm{Pic}^o(\overline{C}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to NS(\overline{X}) \to 0.$$

Cette suite donne naissance à la suite exacte :

$$H^1(k, \mathrm{Pic}^o(\overline{C})) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^1(k, NS(\overline{X})) \to H^2(k, \mathrm{Pic}^o(\overline{C})).$$

D'un autre côté, la suite spectrale de Leray pour la cohomologie étale donne naissance à la suite exacte

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(X) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \to H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$$

(ceci utilise $\mathrm{Br}(\overline{X}) = 0$); à une suite exacte compatible

$$0 \to \mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(C) \to H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{C})) \to 0$$

et à des isomorphismes

$$\mathrm{Br}(C)/\mathrm{Br}(k) = H^1(k, \mathrm{Pic}(\overline{C})) = H^1(k, \mathrm{Pic}^o(\overline{C}))$$

(ceci utilise $\mathrm{Br}(\overline{C}) = 0$ et $C(k) \neq \emptyset$). On obtient ainsi le :

Lemme 6.1 *Soit X/C une surface fibrée en coniques comme ci-dessus. On a alors une injection $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C) \hookrightarrow H^1(k, NS(\overline{X}))$. Si $H^3(k, \mathbf{G}_m))$ s'injecte dans $H^3_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$, par exemple si $H^3(k, \mathbf{G}_m)) = 0$ (il en est ainsi si k est un corps local ou un corps de nombres) ou si $X(k) \neq \emptyset$, alors on a une suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C) \to H^1(k, NS(\overline{X})) \to H^2(k, \mathrm{Pic}^o(\overline{C})). \square$$

(On notera systématiquement $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C)$ ce qu'on devrait noter $\mathrm{Br}(X)/p^*(\mathrm{Br}(C))$.)

Lemme 6.2 *Soit X/C une surface fibrée en coniques comme ci-dessus, et soit $\hat{T} = NS(\overline{X})$. Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccc} CH_0(X/C) & \times & \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C) & & \\ & & & \searrow & \\ \downarrow \Phi & & \downarrow & & \mathrm{Br}(k) \\ & & & \nearrow & \\ H^1(k, T) & \times & H^1(k, \hat{T}) & & \end{array}$$

est commutatif (au signe près). Dans ce diagramme, l'accouplement supérieur est induit par l'évaluation $CH_0(X) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(k)$, et l'accouplement inférieur par le cup-produit. $\square$

Démonstration Soit $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le sous-groupe des classes de zéro-cycles de degré zéro. Soit $\mathrm{Br}_1(X) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{X})]$ (ce groupe coïncide ici avec $\mathrm{Br}(X)$). L'application Φ est obtenue par restriction de l'application

$$\Phi : A_0(X) \to \mathrm{Ext}^1_g(\mathrm{Pic}(\overline{X}), \overline{k}^*)$$

définie dans [CT/S81] (voir (Fro95] et [Fro97a]). L'application $\mathrm{Br}(X) = \mathrm{Br}_1(X) \to H^1(k, \hat{T})$ dans le diagramme ci-dessus est induite par l'application $\theta : \mathrm{Br}_1(X) \to H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ déduite de la suite spectrale mentionnée ci-dessus. Il suffit donc d'établir la commutativité (au signe près) du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A_0(X) & \times & \mathrm{Br}_1(X) & & \\ & & & \searrow & \\ \downarrow \Phi & & \downarrow & & \mathrm{Br}(k) \\ & & & \nearrow & \\ \mathrm{Ext}^1_g(\mathrm{Pic}(\overline{X}), \overline{k}^*) & \times & H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) & & \end{array}$$

où l'accouplement du bas est l'accouplement évident : on décrit un él'ement du groupe de gauche comme une extension de (modules galoisiens) de $\mathrm{Pic}(\overline{X})$ par $\overline{k}^*$; de cette extension on tire un bord allant de $H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X}))$ dans $H^2(g, \overline{k}^*) = \mathrm{Br}(k)$. Le groupe $\mathrm{Br}_1(X)$ s'identifie au noyau de l'application $H^2(g, \overline{k}(X)^*) \to H^2(g, \mathrm{Div}(\overline{X}))$ (cf. [CT/S 77] Lemme 14 p. 213 ou [CT/S86] p. 386). Par ailleurs on a la suite de modules galoisiens :

$$0 \to \overline{k}(X)^*/\overline{k}^* \to \mathrm{Div}(\overline{X}) \to \mathrm{Pic}(\overline{X}) \to 0$$

qui donne naissance à un isomorphisme

$$H^1(g, \mathrm{Pic}(\overline{X})) \simeq \mathrm{Ker}[H^2(g, \overline{k}(X)^*/\overline{k}^*) \to H^2(g, \mathrm{Div}(\overline{X}))].$$

On montre que l'isomorphisme inverse est compatible (au signe près) avec l'application θ, et ceci établit la commutativité (au signe près) du diagramme ci-dessus (pour plus de détails, voir [CT/S77), §7 et Annexe, [CT/S81], §1, et [CT/S86], Prop. 2.7.10). □

Nous pouvons maintenant expliquer le lien entre le théorème A et le théorème B. Supposons que k est un corps de nombres totalement imaginaire.

Comme on l'a déjà rappelé, pour presque toute place v, on a $CH_0(X_v/C_v) = 0$ ([Gros87], Prop. 2.1; [Fro95], Thm. 6.13). Par ailleurs, le groupe $CH_0(X/C)$ est fini ([Gros87]; [Fro95], Thm. 6.12).

Pour toute place v de k, on dispose du carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} CH_0(X_v/C_v) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X_v)/\mathrm{Br}(C_v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \uparrow \\ H^1(k_v, T) & \xrightarrow{\simeq} & \mathrm{Hom}(H^1(k_v, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}). \end{array}$$

Dans ce diagramme, l'application $H^1(k_v, T) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}(H^1(k_v, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est l'isomorphisme déduit de la théorie du corps de classes local via l'accouplement de cup-produit

$$H^1(k_v, T) \times H^1(k_v, \hat{T}) \to \mathrm{Br}(k_v).$$

On a vu ci-dessus qu'on disposait d'une injection $\mathrm{Br}(X_v)/\mathrm{Br}(C_v) \hookrightarrow H^1(k_v, \hat{T})$, qui donne donc lieu à une application surjective

$$\mathrm{Hom}(H^1(k_v, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X_v)/\mathrm{Br}(C_v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

rendant le carré commutatif, d'après le lemme 6.2.

On a $H^3(k_v, \mathbf{G}_m) = 0$, et le lemme 1.2 assure qu'on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(X_v)/\mathrm{Br}(C_v) \to H^1(k_v, \hat{T}_v) \to H^2(k_v, \mathrm{Pic}^o(\overline{C})).$$

On sait que pour toute variété abélienne A sur un corps local non réel, on a $H^2(k_v, A) = 0$ (Tate, voir [Milne 86], Thm. 3.2 p. 51). On a donc $\mathrm{Br}(X_v)/\mathrm{Br}(C_v) \simeq H^1(k_v, \hat{T}_v)$, et dans le carré commutatif ci-dessus, la flèche verticale de droite est un isomorphisme.

D'après Tate, k étant totalement imaginaire, on a aussi $H^2(k, \mathrm{Pic}^o(\overline{C})) = 0$ (voir [Milne86], loc. cit.). On a donc aussi $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C) \simeq H^1(k, \hat{T})$, et le carré commutatif ci-dessus s'insère dans un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
CH_0(X_v/C_v) & \to & \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X_v)/\mathrm{Br}(C_v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \to & \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\
H^1(k_v, T) & \stackrel{\simeq}{\to} & \mathrm{Hom}(H^1(k_v, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \to & \mathrm{Hom}(H^1(k, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).
\end{array}$$

où les flèches horizontales de droite sont déduites des flèches de restriction de k à k_v, et où les deux flèches verticales de droite sont des isomorphismes.

La théorie du corps de classes globale montre que pour le k-tore T, on a la suite exacte

$$H^1(k, T) \to \bigoplus_{v \in \Omega} H^1(k_v, T) \to \mathrm{Hom}(H^1(k, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où pour $v \in \Omega$, la flèche $H^1(k_v, T) \to \mathrm{Hom}(H^1(k, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est obtenue par composition de l'isomorphisme de dualité locale $H^1(k_v, T) \simeq \mathrm{Hom}(H^1(k_v, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ et de la flèche

$$\mathrm{Hom}(H^1(k_v, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}(H^1(k, \hat{T}), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

duale de la restriction de k à k_v.

En comparant ces divers diagrammes et suites exactes, on voit immédiatement que le théorème A implique le théorème B. Ce dernier implique le théorème (plus faible), qu'on comparera à [CT/SwD94, Thm. 6.2] et [CT/Sk/SwD97, Thm. 4.8] :

Théorème C *Soit X/C une surface fibrée en coniques comme ci-dessus. Supposons le corps de nombres k totalement imaginaire. Alors la suite naturelle de groupes abéliens finis*

$$CH_0(X/C) \to \bigoplus_{v \in \Omega} CH_0(X_v/C_v)/Br \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(C), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

est exacte. On a noté ici $CH_0(X_v/C_v)/Br$ le quotient de $CH_0(X_v/C_v)$ par la relation d'équivalence induite par l'accouplement avec le groupe $\mathrm{Br}(X_v)$ (i.e. avec $\mathrm{Br}(X_v)/\mathrm{Br}(C_v)$).

Remarques

1) Je ne sais pas si les théorèmes B et C valent pour un corps de nombres formellement réel.

2) Lorsque C n'est pas de genre zéro, l'application

$$\Phi_v : CH_0(X_v/C_v) \to H^1(k_v, T) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X_v)/\mathrm{Br}(C_v), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

n'est pas nécessairement injective (Parimala/Suresh [Pa/Su95]). Le théorème C n'implique donc pas a priori le théorème B, à la différence du cas des fibrés en coniques au-dessus de la droite projective (Salberger [Sal88], voir aussi [CT/SwD94]).

Appendice : niveau des corps de fonctions de surfaces fibrées en coniques, par J.-L. Colliot-Thélène et R. Sujatha.

Proposition A.1 *Soient k un corps, C/k une k-courbe projective et lisse géométriquement connexe, et X/k une k-surface projective et lisse géométriquement connexe munie d'un k-morphisme $p : X \to C$ de fibre générique X_η une conique lisse. Soit $k(C)$ le corps des fonctions rationnelles sur C et $A/k(C)$ l'algèbre de quaternions attachée à X_η. Supposons $X(k_v) = \emptyset$ pour toute place réelle v de k. Alors -1 est une somme de quatre carrés dans $k(X)$ si et seulement s'il existe une fonction $f \in k(C)^*$ telle que $f \cup A = (-1,-1,-1) \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$. Cette condition équivaut à l'existence de $f \in k(C)^*$ telle que :*

a) Pour v place réelle, f est négative en tout point de $C(k_v)$ où elle est définie.

b) Le cup-produit $f \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ a tous ses résidus triviaux, en d'autres termes, f appartient à $k(C)^*_{dn}$, et $sp(f) = 1 \in E^*/NF^*$.

c) Pour toute place finie v de k où la courbe C a mauvaise réduction, et toute place 2-adique, $f \cup A = 0 \in H^3(k_v(C), \mathbf{Z}/2)$, i.e. $f \in k_v(C)$ est une norme réduite de $A \otimes_{k(C)} k_v(C)$.

Démonstration Par la proposition 3.1, -1 est une somme de quatre carrés dans $k(X)$ si et seulement si $(-1,-1,-1) = 0 \in H^3(k(X), \mathbf{Z}/2)$. Comme $X_\eta/k(C)$ est une conique lisse, le noyau de l'application $H^3(k(C), \mathbf{Z}/2) \to H^3(k(X), \mathbf{Z}/2)$ est formé des éléments de la forme $f \cup A$ avec $f \in k(C)^*$ (Arason [Ar75]). Ainsi -1 est une somme de quatre carrés dans $k(X)$ si et seulement s'il existe $f \in k(C)^*$ tel que $(-1,-1,-1) = f \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$.

S'il existe une telle fonction f, tous les résidus de $f \cup A$ sont triviaux. Ceci est le cas si et seulement si f appartient à $k(C)^*_{dn}$ et que de plus $sp(f) = 1 \in E^*/NF^*$. Par ailleurs, pour v place finie, $(-1,-1,-1) = 0 \in k_v$, on a donc $f \cup A = 0 \in H^3(k_v(C), \mathbf{Z}/2)$. En utilisant les résultats de Witt sur les courbes sur le corps des réels, on établit le :

Lemme A.2 *Soit $X \to C$ une fibration en coniques au-dessus d'une courbe, le corps de base étant le corps $\mathbf{R}$ des réels. Soit $A/\mathbf{R}(C)$ l'algèbre de quaternions associée. Si $X(\mathbf{R}) = \emptyset$, alors X/C est birationnel (au-dessus de C) au produit de C et de la conique d'équation homogène $x^2+y^2+z^2 = 0$, et l'algèbre A est $\mathbf{R}(C)$-isomorphe à l'algèbre de quaternions standard $(-1,-1)$.*□

Pour v place réelle de k, et X/C comme dans la proposition, on a donc $A \otimes_{k(C)} k_v(C) = (-1,-1)_{k_v(C)}$ et donc pour f comme ci-dessus, $(f,-1,-1) = (-1,-1-1) \in H^3(k_v(C), \mathbf{Z}/2)$. Mais alors (Proposition 1.3), $-f$ est une somme de quatre carrés dans $k_v(C)$, ce qui par les résultats de Witt équivaut aussi au fait que $-f$ est positive sur $C(k_v)$ là où elle est définie, ou encore au fait que $-f$ est une somme de deux carrés dans $k_v(C)$.

Réciproquement, soit f comme dans l'énoncé du théorème. En particulier la classe $f \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ est non ramifiée en tout point fermé de C. Ceci implique le même énoncé pour l'image de $f \cup A$ dans chaque $H^3(k_v(C), \mathbf{Z}/2)$. Cette image est donc nulle pour toute place finie v, par hypothèse pour les places de mauvaise réduction, et par [Kato86], Cor. 2.9, pour les autres places. L'hypothèse a) et les résultats de Witt assurent que pour toute place réelle v de k, la classe de $f \cup A$ coïncide avec celle de $(-1,-1,-1)$ dans $H^3(k_v(C), \mathbf{Z}/2)$. Ainsi $f \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ et $(-1,-1,-1) \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ ont même image dans $H^3(k_v(C), \mathbf{Z}/2)$ pour chaque place v de k. D'après le principe local-global de Kato ([Kato86], Theorem 0.8 (2)), ceci assure $f \cup A = (-1,-1,-1) \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$. Ainsi $(-1,-1,-1) = 0 \in H^3(k(X), \mathbf{Z}/2$, et par Proposition 1.3 -1 est une somme de quatre carrés dans le corps $k(X)$. □

On sait [CT/Jan91] que si X/k est une surface projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps de nombres k, telle que $X(k_v) = \emptyset$ pour toute place réelle v de k, alors -1 est une somme de 8 carrés dans le corps des fonctions de X. Pour les surfaces fibrées en coniques, on peut dire plus.

Théorème A.3 *Soit X/C une fibration en coniques au-dessus d'une courbe sur un corps de nombres. Supposons $C(k) \neq \emptyset$, et supposons $X(k_v) = \emptyset$ pour toute place réelle v de k. Alors -1 est une somme de quatre carrés dans $k(X)$.*

Démonstration Soit A un point fermé de degré 2 sur la fibre X_∞. Procédant comme au paragraphe 2, on trouve une courbe $D \subset X$, lisse et géométriquement intègre, finie sur C, et un zéro-cycle effectif z à support dans $X \setminus X_\infty$, tel que z soit rationnellement équivalent à sA sur D, avec $n = 2s > 2g-2+r$ (notations du lemme 4.1), et que $p_*(z)$ ait toutes ses multiplicités égales à 1, et son support en dehors des points $P_i, i \in I$. Soit $g \in k(D)$ telle que $\mathrm{div}_D(g) = z - sA$. Soit h la norme de $k(D)$ à $k(C)$ de g. C'est une norme réduite de A, et $\mathrm{div}_D(h) = p_*z - 2sP_\infty$.

Pour chaque place finie v ou complexe de k, définissons $f_v = h \in k_v(C)$. Pour v place réelle, soit $f_v = -h$. Les fonctions f_v satisfont les hypothèses du lemme 4.2, avec $\eta = 1 \in E^*/N_{E/F}F^*$. Pour v finie ou complexe, c'est évident. Pour v réel, il est clair que $-h$ appartient à $k_v(C)^*_{dn}$. De l'hypothèse $X(k_v) = \emptyset$ il résulte $E_v^*/NF_v^* = 1$. On a donc bien aussi $sp(f_v) = 1$. Soit S_0 un ensemble fini de places contenant les places réelles, les places dyadiques et les places finies de mauvaise réduction pour C. Le lemme principal 4.2 et sa démonstration assurent alors l'existence d'une fonction $f \in V_n \subset k[U]$ appartenant à $k(U)^*_{dn}$, telle que $sp(f) = 1$, donc telle que $f \cup A \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ soit non ramifié en tout point de U, donc de C par réciprocité, telle que de plus $f/f_v \in \mathrm{Nrd}(A_{k_v(C)})$ pour chaque place v, et qu'enfin $f \in V_n \otimes_k k_v$ soit arbitrairement proche de $f_v = -h$ pour v réelle. Soit v une place réelle. De l'hypothèse $X(k_v) = \emptyset$ et du fait que $p_*(z)$ a toutes ses multiplicités égales à 1, on conclut que h n'a pas de zéro ou pôle dans $C(k_v)$ autre que le point P_∞, en outre h est une norme réduite de A, c'est donc une somme de quatre carrés dans $k_v(C)$ (Lemme A.2), et donc strictement positive sur $U(k_v)$. Par une variante du lemme de Krasner, on voit que si $f \in V_n \otimes_k k_v$ est assez proche de $f_v = -h$, alors f est strictement négative en tout point de $U(k_v)$. Le conditions de la proposition A.1 sont donc satisfaites, et -1 est une somme de quatre carrés dans $k(C)$. □

Bibliographie

[Ar75] J. Kr. Arason, *Kohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), 448-491.

[Ca64] J.W.S. Cassels, *Arithmetic on curves of genus 1 (VII). The dual exact sequence*, J. für die reine und àngew. Math. (Crelle) **216** (1964), 150-158.

[CT95] J.-L. Colliot-Thélène, *L'arithmétique du groupe de Chow des zéro-cycles*, Journées arithmétiques de Bordeaux 1993, Journal de théorie des nombres de Bordeaux **7** (1995), 51-73.

[CT97] J.-L. Colliot-Thélène, *Conjectures de type local-global sur l'image de l'application cycle en cohomologie étale*, prépublication, 1997.

[CT/Jan91] J.-L. Colliot-Thélène et U. Jannsen, *Sommes de carrés dans les corps de fonctions*, C. R. Acad. Sc. Paris **312** (1991), 759-762.

[CT/S77]J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La R-équivalence sur les tores*, Ann. Sc. E. N. S. **10** (1977), 175-229.

[CT/S81] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch*, Duke Math. J. **48** (1981), 421–447.

[CT/S87] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles II*, Duke Math. J. **54** (1987), 375-492.

[CT/Sko93] J.-L. Colliot-Thélène et A.N. Skorobogatov, *Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques*, K-Theory **7** (1993), 477-500.

[CT/Sk/SwD97] J.-L. Colliot-Thélène, A.N. Skorobogatov and Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Rational points and zero-cycles on fibred varieties: Schinzel's hypothesis and Salberger's device*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle), **495** (1998), 1-28.

[CT/SwD94] J.-L. Colliot-Thélène and Sir Peter Swinnerton-Dyer, *Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer varieties and similar varieties*, Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) **453**, (1994) 49-112.

[Co80] D. F. Coray, *Two remarks on the Bertini theorem*, typescript 1980.

[Fro95] E. Frossard, *Groupe de Chow de dimension zéro des variétés fibrées en variétés de Severi-Brauer au-dessus d'une courbe de genre quelconque*, Thèse, Université de Paris-Sud (1995).

[Fro97a] E. Frossard, *Groupe de Chow de dimension zéro des fibrations en variétés de Severi-Brauer*, Compositio mathematica, à paraître.

[Fro97b] E. Frossard, *Fibres spéciales des schémas de Severi-Brauer d'ordres*, J. of Algebra, à paraître.

[Gros87] M. Gros, *0-cycles de degré 0 sur les surfaces fibrées en coniques*, Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) **373** (1987), 166-184.

[Kato86] K. Kato, *A Hasse principle for two-dimensional global fields*, Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) **366** (1986), 142-181.

[Kl/Al79] S. L. Kleiman and A. B. Altman, *Bertini theorems for hypersurface sections containing a subscheme*, Communications in Algebra **7** (8) (1979), 775-790.

[M/S] A. S. Merkur'ev et A. A. Suslin, *K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et homomorphisme de norme résiduel* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **46** (1982); trad. ang. Math. SSSR Izvestija **21** (1983), 307-340.

[Milne86] J. S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Math. vol. **1**, Academic Press 1986.

[Pa/Su95] R. Parimala and V. Suresh, *Zero-cycles on quadric fibrations : Finiteness theorems and the cycle map*, Invent. math. **122** (1995), 83-117.

[Sai89] S. Saito, *Some observations on motivic cohomology of arithmetic schemes*, Invent. math. **98** (1989), 371-404.

[Sal85] P. Salberger, *K-theory of orders and their Brauer-Severi schemes*, Thèse, Université de Göteborg, 1985.

[Sal88] P. Salberger, *Zero-cycles on rational surfaces over number fields,* Invent. math. **91** (1988), 505-524.

[San82] J.-J. Sansuc, *Descente et principe de Hasse pour certaines variétés rationnelles,* Séminaire de théorie des nombres, Paris 1980-1981, Progress in Math. **22**, Birkhäuser 1982.

[Witt37] E. Witt, Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper, Journal für die reine und angew. Math. (Crelle) **171** (1934), 31-44.

J.-L. Colliot-Thélène,

C. N. R. S.,
URA D0752, Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
F-91405 Orsay
France

e-mail: colliot@math.u-psud.fr

Until May 1st, 1998 :

Isaac Newton Institute,
20 Clarkson Road,
Cambridge CB3 0EH
United Kingdom
e-mail : jlc36@newton.cam.ac.uk

Recent Newton Institute Preprints

NI97010-RAG **N Gordeev**
Freedom in conjugacy classes

NI97011-AOD **S Ren and TG Shepherd**
Lateral boundary contributions to wave-activity invariants and nonlinear stability theorems for balanced dynamics
J. Fluid Mech. (1997), pp. 287-305

NI97012-AOD **K Ngan and TG Shepherd**
Comments on some recent measurements of anomalously steep N_2O *and* O_3 *tracer spectra in the stratospheric surf zone*

NI97013-NQF **A Sen**
Orientifold limit of F-theory vacua
hep-th/9702165; Phys.Rev. D55 (1997) 7345-7349

NI97014-RAG **A Kondratiev and VI Trofimov**
Vertex stabilizers of finite symmetric graphs and a strong version of the Sims conjecture

NI97015-NQF **JP Gauntlett, GW Gibbons, G Papadopoulos et al**
Hyper-Kähler manifolds and multiply intersecting branes
hep-th/9702202; Nucl.Phys. B500 (1997) 133-162

NI97016-NQF **O Bärwald, RW Gebert and H Nicolai**
On the imaginary simple roots of the Borcherds algebra $\mathfrak{g}_{II_{9,1}}$
hep-th/9705144; Nuclear Physics B510 [PM] (1998) 721-738

NI97017-NQF **A Sen and S Sethi**
The mirror transform of type I vacua in six dimensions
hep-th/9703157; Nucl.Phys. B499 (1997) 45-54

NI97018-NQF **I Halperin and A Zhitnitsky**
Polarized intrinsic charm as a possible solution to the proton spin problem
hep-ph/9706251

NI97019-NQF **N Dorey, VV Khoze and MP Mattis**
Instantons, three-dimensional gauge theory and the Atiyah-Hitchin manifold
hep-th/9703228; Phys.Lett. B408 (1997) 213-221

NI97020-NQF **N Dorey, VV Khoze, MP Mattis et al**
Multi-instantons, three-dimensional guage theory, and the Gauss-Bonnet-Chern theorem
hep-th/9704197; Nucl.Phys. B502 (1997) 94-106

NI97021-NQF **JM Figueroa-O'Farrill, C Köhl and B Spence**
Supersymmmetry and the cohomology of (hyper) Kähler manifolds
hep-th/9705161; Nucl.Phys. B503 (1997) 614-626

NI97022-NQF **JP Gauntlett**
Duality and supersymmetric monopoles
hep-th/9705025; Nucl.Phys.Proc.Suppl. 61A (1998) 137-148

NI97023-NQF **JP Gauntlett**
Intersecting branes
hep-th/9705011

NI97024-RAG **J Rickard**
Triangulated categories in the modular representation theory of finite groups

NI97025-NQF **P van Baal**
Intermediate volumes and the role of instantons

NI97026-NQF **CJ Houghton, NS Manton and PM Sutcliffe**
Rational maps, monopoles and skyrmions
hep-th/9705151; Nuclear Physics B510 [PM] (1998) 507-537

NI97027-NQF **PS Howe, E Sezgin and PC West**
Aspects of superembeddings
hep-th/9705903

NI97028-NQF **CM Hull**
Gravitational duality, branes and charges
hep-th/9705162; Nucl.Phys. B509 (1998) 216-251

NI97029-NQF **M Abou Zeid and CM Hull**
Instrinsic geometry of D-branes
hep-th/9704021; Phys.Lett. B404 (1997) 264-270

NI97030-NQF **CP Bachas, MR Douglas and MB Green**
Anomalous creation of branes
hep-th/9705074

NI97031-RAG **M Broué, G Malle and J Michel**
Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras

NI97032-NQF **D Zwanziger**
Renormalization in the Coulomb gauge and order parameter for confinement in QCD

NI97033-NQF **E Shuryak and A Zhitnisky**
The gluon/charm content of the η' *meson and instantons*
hep-ph/9706316; Phys.Rev. D57 (1998) 2001-2004

NI97035-RAG **K Magaard and G Malle**
Irreducibility of alternating and symmetric squares

NI97036-STA **N Linden and S Popescu**
On multi-particle entanglement

NI97037-NNM **M Studeny and RR Bouckaert**
On chain graph models for description of conditional independence structures

NI97038-RAG **M Geck and G Malle**
On special pieces in the unipotent variety

NI97039-NNM **SP Luttrell**
A unified theory of density models and auto-encoders
DERA report DERA/CIS/CIS5/651/FUN/STIT/5-4 31 October 1997

NI97040-NNM **CKI Williams and D Barber**
Bayesian Classification with Gaussian Processes

NI97041-NNM **TS Richardson**
Chain graphs and symmetric associations

NI97042-NNM **A Roverato and J Whittaker**
An importance sampler for graphical Gaussian model inference

NI97043-DQC **MR Haggerty, JB Delos, N Spellmeyer et al**
Extracting classical trajectories from atomic spectra

NI97044-DQC **S Zelditch**
Large level spacings for quantum maps in genus zero

NI97045-DQC **U Smilansky**
Semiclassical quantization of maps and spectral correlations

NI97046-DQC **IY Goldscheid and BA Khoruzhenko**
Distribution of Eigenvalues in non-Hermitian Anderson models
Phys. Rev. Lett. 80 (1998) No.13, 2897-2900

NI97047-DQC **G Casati, G Maspero and DL Shepelyansky**
Quantum fractal Eigenstates

NI98001-STA **N Linden and S Popescu**
Non-local properties of multi-particle density matrices

NI98002-AMG **J-L Colliot-Thélène**
Un principe local-global pour les zéro-cycles sur les surfaces fibrés en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque

---

Information about Newton Institute Preprints is also available at
`http://www.newton.cam.ac.uk/preprints.html`